

Introduction aux mathématiques

Partie I: Présentation, plan et motivations

Table des matières

1 Introduction	1
2 Plan de la série	1
3 Que sont les maths ?	1

1 Introduction

Cette série de documents est une introduction aux mathématiques adressée aux personnes n'ayant pas ou peu de connaissances en maths au préalable : aucune supposition n'est faite sur ce qui est connu par lae lectureurice. Cependant, il sera plus simple de comprendre les concepts et motivations pour les personnes ayant déjà été familiarisées à des résultats basiques de maths ou, plus généralement, celles ayant étudié dans un domaine scientifique qui requiert l'utilisation des mathématiques. Cela étant dit, nous ferons de notre mieux pour rendre le contenu de ces documents aussi accessible que possible.

Il s'agit d'une introduction aux mathématiques plutôt informelle et basée sur l'intuition dont le but est d'établir quelques connaissances élémentaires sur le fonctionnement des maths de manière à être capable d'étudier par la suite des sujets plus avancés en mathématiques. L'objectif principal est de familiariser lae lectureurice avec les bases du vocabulaire, des notations et des méthodes mathématiques. Le contenu exposé dans ces documents est traditionnellement enseigné aux étudiant'es de première année d'études supérieures.

2 Plan de la série

Dans la partie II, nous commencerons par introduire les éléments basiques de la **logique mathématique** tels que les propositions, les connecteurs logiques et les quantificateurs. Ensuite nous discuterons des **méthodes de démonstration** principales utilisées en maths.

Dans la partie III, nous aborderons les notions élémentaires de la **théorie des ensembles** ainsi que les **ensembles de nombres** de base.

Dans la partie IV, nous examinerons les concepts de relations, d'**applications** entre ensembles, de **suites** et les différents vocabulaires associés.

Dans la partie V, nous présenterons les **domaines des mathématiques** majeurs de manière à ce que lae lectureurice ait une idée de quoi apprendre par la suite.

3 Que sont les maths ?

Pour répondre à cette question, nous pourrions prendre une approche historique : examiner quand et comment les mathématiques se sont développées dans le passé dans différentes civilisations et par la suite aboutir à des conclusions sur l'utilité des mathématiques. Cependant, bien que cette approche permet de bien motiver les concepts et résultats en maths, cela restreint les mathématiques à ses applications et oublie ce que l'on considère comme la vraie puissance des maths : les **abstractions**.

En maths, on ne s'intéresse pas aux entités physiques/matérielles mais plutôt à leur abstractions, c'est-à-dire, les représentations purement mentales de ces objets. Ces représentations ne requièrent non

pas nos sens pour les percevoir mais plutôt notre esprit pour les appréhender. Par exemple, quand nous étudions des droites en géométrie, on ne considère pas que la ligne que l'on trace sur une feuille de papier avec un crayon est l'objet que l'on étudie mais plutôt une simple représentation, avec ces propres limitations, de ce que nous manipulons effectivement, à savoir un ensemble infini de points sans largeur.

Ces abstractions, que nous appellerons dorénavant « objets mathématiques », sont décrites par des propriétés explicites, qui se doivent être sans ambiguïté, précisant la nature de l'objet et la manière dont il se comporte avec d'autres objets mathématiques. Nous appelons ces propriétés les **axiomes** de l'objet mathématique en question. Ce sont les « atomes » de notre raisonnement mathématique : ce sont les assertions que nous supposons vraies et qui joueront le rôle de fondements du développement de nos théories mathématiques.

Mais comment développons-nous de telles théories ? C'est ici que le concept de **démonstration** intervient. Si nous devons définir ce que sont les mathématiques, nous dirions que c'est la science de la démonstration déductive. Une démonstration déductive est le procédé d'appliquer des règles deductives sur des propositions. Nous verrons plus en détails dans la partie II ce que nous voulons dire lorsque l'on dit proposition. Ici, d'une manière informelle, règles deductives désignent les manières possibles d'*inférer* une proposition à partir d'une autre, c'est-à-dire, si la première est vraie alors la seconde est également vraie.

Une théorie en maths est somme toute comme un jeu dont les règles sont les règles deductives qu'on utilise dans les démonstrations et les axiomes des objets mathématiques que nous étudions. C'est comme un puzzle où les pièces sont les objets mathématiques et dont la forme des pièces est définie par les axiomes et règles deductives. Les maths peuvent être considérées comme l'étude de ces jeux/puzzles : déterminer ce qui est vrai et faux, ou autrement dit en suivant notre analogie, déterminer quelle pièce va avec quelle autre pièce.